初三暑假补课讲义

第一次课:旋转基本类型回顾

要点:旋转图形的性质运用

(1)线的旋转:(2)三角形的旋转;(3)矩形的旋转

第二次课:旋转构图问题的再学习

要点:共点等长问题的处理(三爪图)

见60度旋转60度，见90度旋转90度

第三次课:旋转作图及一题多解问题

要点:旋转落点定与不定问题

第四次课:夹角定位法来处理路径问题及最值问题

要点:旋转法构图来处理路径及最值问题

第五次课:与60度有关的旋转构图

要点:菱形及等边三角形环境下的综合类问题

第六次课:旋转与三边关系及中位线

要点:旋转法构图来转化线段处理最值问题及费马点问题

第七次课:见中点倍长中线类型问题

要点:构造等腰直角三角形来处理线段的位置及数量关系

旋转第一次课：旋转初步知识的复习

➢ 旋转的定义和性质

1.旋转的定义

在平面内，将一个图形绕一个定点按某个方向转动一个角度，这样的图形运动称为旋转，这个定点称为旋转中心，转动的角称为旋转角．旋转不改变图形的大小和形状．

2. 旋转的性质：

图形的旋转是图形上的每一点在平面上绕着某个固定点旋转固定角度的位置移动，因此具有如下性质

① 对应点到旋转中心的距离相等。

② 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角。

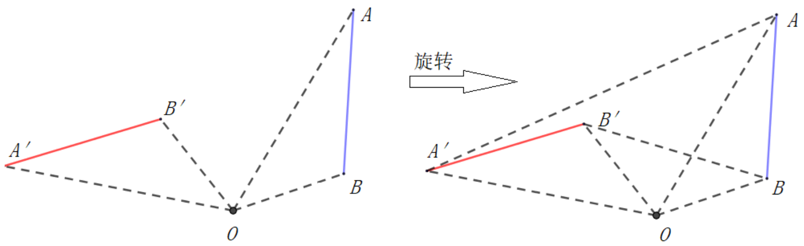
③ 旋转前、后的图形全等，即旋转前后图形的大小和形状没有改变。

④ 旋转中心是唯一不动的点。

⑤ 一组对应点的连线所在的直线所交的角等于旋转角度。

【指出】旋转的三要素：旋转中心、旋转方向、旋转角.

➢ 旋转图态剖析



注意：对应线段与旋转中心的连线构成等腰三角形，利用此特征可以找旋转中心

➢ 典型问题一：基础类

第一块：基本旋转图形的认识，理清旋转三要素

例 1、 如图 1，把△*ABP* 绕点 *B* 逆时针旋转一定角度后得到△*A′BP′*，其中∠*ABP* = 45º，∠*A′BP* = 15º，请你指出旋转中心和旋转的角度.

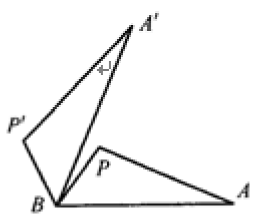


图 1

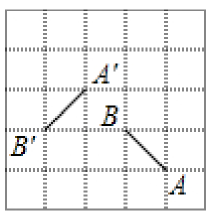


图 2

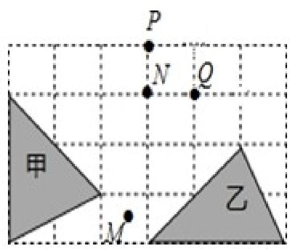


图 3

练习 1.如图 2，在正方形网格中，线段 A′B′ 是线段 AB 绕某点逆时针旋转角 α 得到的，点 A′ 与 A 对应，则角 α 的大小为（ ）

A．30°　　B．60°　　C．90°　　D．120°

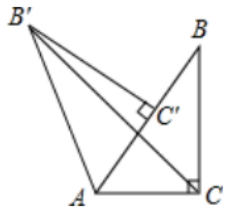
2、如图 3，在 6×4 方格纸中，格点三角形甲经过旋转后得到格点三角形乙，则其旋转中

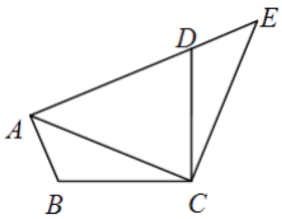
心是（　　）.

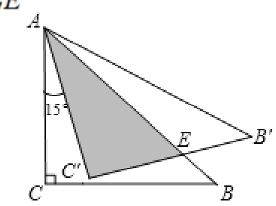
A．点 M　　　B．格点 N　　C．格点 P　　　　D．格点 Q

第二块：利用旋转的性质来求角度或线段的长

例 3、如图 4，在 Rt△ABC 中，∠ACB=90º，∠BAC=60º，AB=6．Rt△$AB'C'$ 可以看作是由 Rt△ABC 绕点 A 逆时针方向旋转 60º 得到的，则线段 $B'C$ 的长为____________.







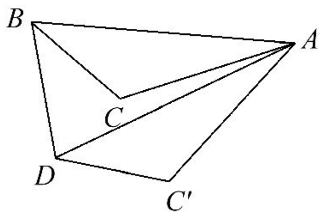


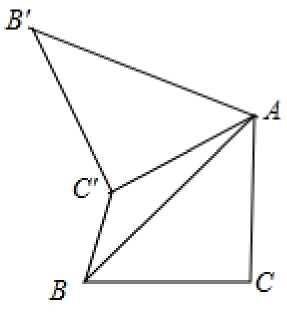
图 4　　　　　　　　　　图 5　　　　　　　　　图 5　　　　　　　　　　　图 6

练习：1.如图 5，将△ABC 绕点 C 顺时针旋转 90°得到△EDC． 若点 A，D，E 在同一条直线上，∠ACB=20°，则∠ADC 的度数是_________.

2. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中，∠C=90°，将 Rt△ABC 绕点 A 逆时针旋转 15°得到 Rt△AB′C′，B′C′交 AB 于点 E，若图中阴影部分面积为 2 $\sqrt{3}$，则 B′E 的长为________.

3.如图 6,将△ABC 绕点 A 按逆时针旋转 30°后,得到△ADC′,则∠ABD 的度数是___________.

4.如图，在△ABC 中，∠C=90°，AC=BC= $\sqrt{2}$，将△ABC 绕点 A 顺时针方向旋转 60°到△$AB'C'$ 的位置，连接 $C'B$，求 $C'B$ 的长.

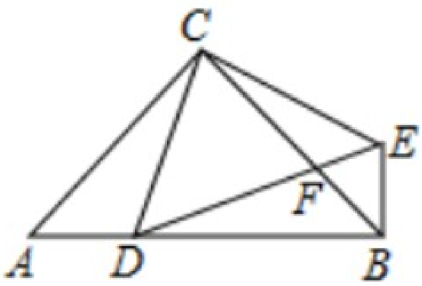


第三块：特定图形旋转下的综合类问题

（线段的旋转）如图，在△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC，D 是 AB 边上一点（点 D 与 A，B 不重合），连结 CD，将线段 CD 绕点 C 按逆时针方向旋转 90°得到线段 CE，连结 DE 交 BC 于点 F，连接 BE.

（1）求证：△ACD≌△BCE;

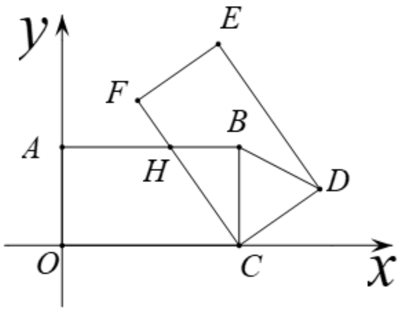
（2）当 AD=BF 时，求∠BEF 的度数.



（矩形的旋转）如图，在平面直角坐标系中，把矩形 COAB 绕点 C 顺时针旋转 α 度的角，得到矩形 CFED，设 FC 与 AB 交于点 H，且 A（0,4）,C（8,0）.

（1）当 $\alpha=60°$时，△CBD 的形状是____________________.

（2）当 AH=HC 时，求直线 FC 的解析式.

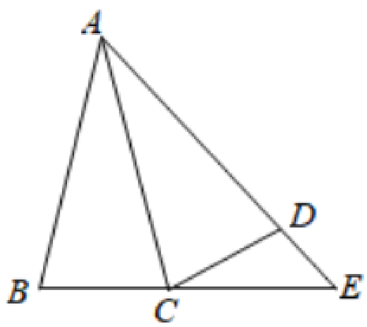


（三角形的旋转）如图，△ABC 中，AB=AC，∠BAC=30°，将△ABC 绕着点 A 逆时针旋转 30°，点 C 的对应点为点 D，AD 的延长线与 BC 的延长线相交于点 E.

（1）求∠B 的度数.

（2）当 AB=4 时，求点 B 到 AC 的距离.

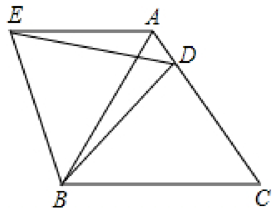
（3）若 DE= $\sqrt{2}$ ，求 CE 的长.

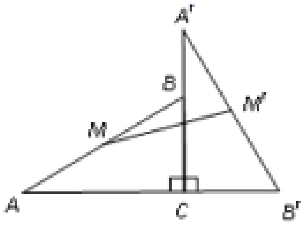


➢ 典型问题二：综合类问题

1. 如图 1，在等边△ABC 中，D 是边 AC 上一点，连接 BD，将△BCD 绕点 B 逆时针旋转 60°得到△BAE，连接 ED，若 BC=8，BD=7，则△AED 的周长是（　　）

A. 15　B. 14　C. 13　D. 12





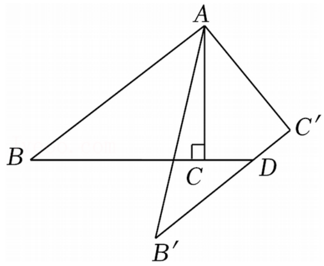


图 1　　　　　　　　　　图 2　　　　　　　　图 3

2．如图 2，在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，将△ABC 绕点 C 顺时针旋转 90°得到△A′B′C，M、M′分别是 AB、A′B′的中点，若 AC＝4，BC＝2，则线段 MM′的长为____．

3．如图 3，在 Rt△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，*AC*＝6，*BC*＝8．将△*ABC* 绕点 *A* 逆时针旋转得到△*AB′C′*，*BC* 的延长线交 *B′C′* 于点 *D*，若 *B′C′*∥*AB*，则 *CD* 的长为 ____．

4. 如图 4，在△ABC 中，AB=AC，∠B=30°，点 D、E 分别为 AB、AC 上的点，且 DE∥BC．△ADE 绕点 A 逆时针旋转至点 B、A、E 在同一条直线上，连接 BD、EC．下列结论：①△ADE 的旋转角为 120°；②BD=EC；③BE=AD+AC；④DE⊥AC，其中正确的有____．

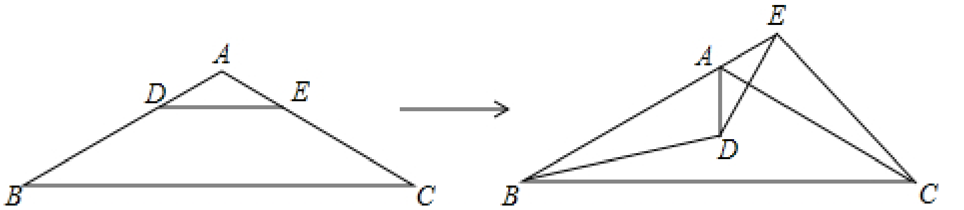
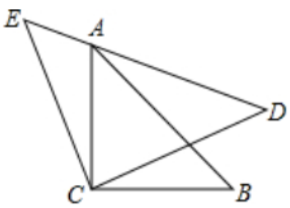
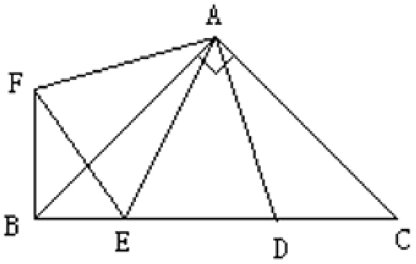


图 4

5. 如图 5，△ACB 和△ECD 都是等腰直角三角形，CA=CB，CE=CD，△ABC 的顶点 A 在△ECD 的斜边上，若 AE= $\sqrt{3}$，AD= $\sqrt{11}$，则 AC 的长为 _____．





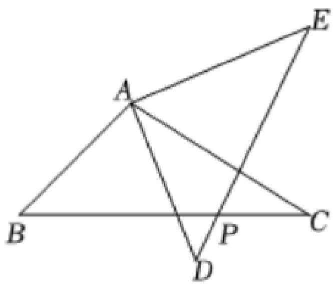


图 5　　　　　　　　　　　图 6　　　　　　　　　　　图 7

6. 如图 6，在 Rt△*ABC* 中，AB=AC，D、E 是斜边 BC 上两点，且∠DAE=45°，将△ADC 绕点 A 顺时针旋转 90°后，得到△AFB，连接 EF．下列结论：①∠EAF=45°；②BE=CD；③EA 平分∠CEF；④ $BE^2+CD^2=DE^2$．下其中正确的个数有______个．

7．如图 7，在△ABC 中，∠ABC＜60°，将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 60°得到

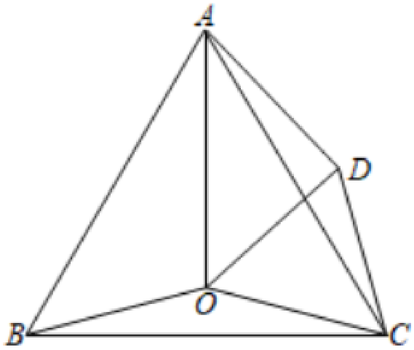
△ADE，DE与BC交于点P．下列结论：①∠EPC=60°；②ED⊥AC；③PA+PC=PE；④PA平分∠BPE，

其中正确的是 ______（填序号）．

8.如图，点O是等边△ABC内一点，将CO绕点C顺时针旋转60°得到CD，连接OD，AO，BO，AD．

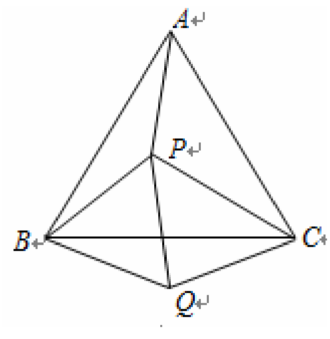
（1）求证：△BCO≌△ACD．

（2）若OA=10，OB=8，OC=6，求∠BOC的度数．

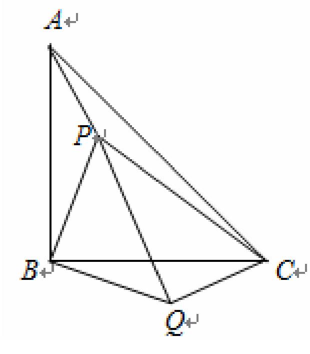


9.(1)如图①所示，P是等边△ABC内的一点，连结PA、PB、PC，将△BAP绕B点顺时针旋转60°得△BCQ,连结PQ．若$PA^2+PB^2=PC^2$，证明∠PQC=90°．

(2) 如图②所示，P是等腰直角△ABC（∠ABC=90°）内的一点，连结PA、PB、PC，将△BAP绕B点顺时针旋转90°得△BCQ,连结PQ．当PA、PB、PC满足什么条件时，∠PQC=90°？请说明理由.



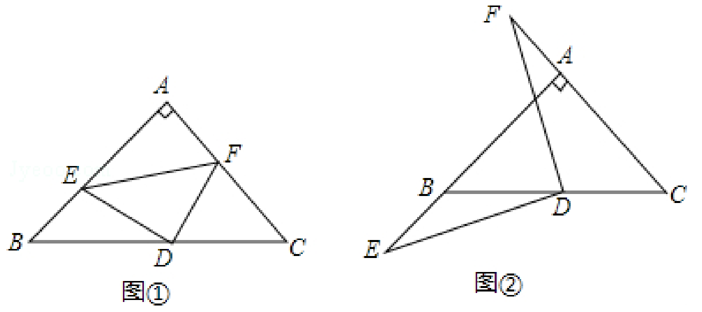
图①



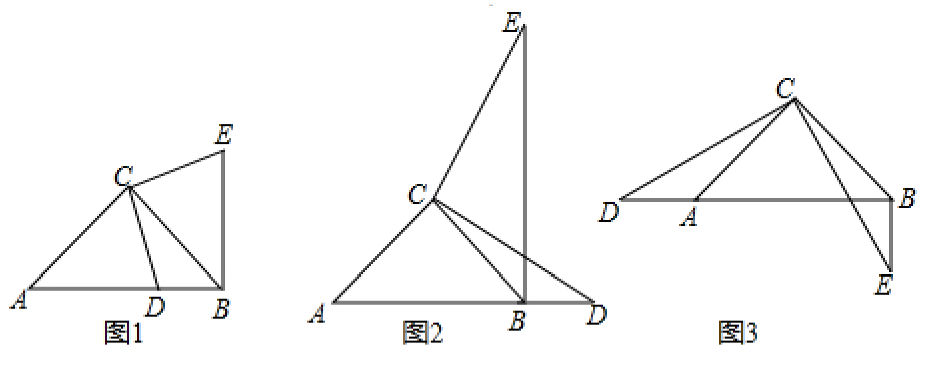
图②

10.如图，在△ABC中，AB＝AC，∠BAC＝90°，点D为BC的中点，点E，F分别在直线AB，AC上运动，且始终保持DE⊥DF．

（1）求证：AE+AF= $\sqrt{2}$ DC；
（2）如图②，若点 E，F 分别在线段 AB，CA 的延长线上，直接写出 EF，ED，DF 之间的数量关系．



11. 在 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC，点 D 在直线 AB 上，连接 CD，并把 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° 到 CE．
（1）如图 1，点 D 在 AB 边上，线段 BD，BE，CD 的数量关系为__________．
（2）如图 2，点 D 在点 B 右侧，请猜想线段 BD，BE，CD 的数量关系，并证明你的结论．
（3）如图 3，点 D 在点 A 左侧，BC= $\sqrt{2}$ ，AD=BE=1，请直接写出线段 EC 的长．



12.在等腰三角形 ABC 中，AB=AC，点 D 是 AC 上一动点，点 E 在的 BD 延长线上，且 AB=AE，AF 平分∠CAE 交 DE 于点 F，连接 FC.

（1）如图 1，求证：∠ABE=∠ACF；

（2）如图 2，当∠ABC=60°时，求证：AF+EF=FB；

（3）如图 3，当∠ABC=45°，且 AE∥BC 时，求证：BD=2EF

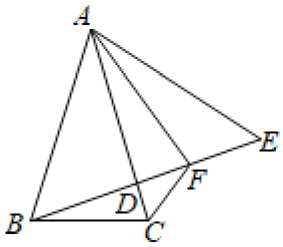


图1

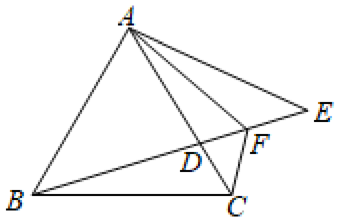


图2

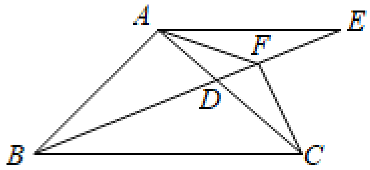


图3

旋转第二次课：旋转构图问题

➢ 知识指引

我们在处理某些几何问题时，往往对题中的条件无法直接展开利用，这个时候往往要向旋转变换这块进行构图考虑，正所谓“看不转，用旋转”，

方法介绍：在同一平面内将图形的某一部分按特定的条件旋转一个角度，使图形中的相关条件发生新的联系，这种分析解答题目的方法在几何中我们称之为“旋转法”.

应用技巧：旋转法在进行构图时，往往根据基本的图形，找共顶点的等线段（共点等长），从而决定了旋转中心，旋转角度和旋转方向，

旋转构图：对原有图形添加适当的添辅助线，从而达到一种旋转全等变换．变换的目的是为了实现已知与结论中的相关元素的相对集中或分散重组，使表面上不能发生联系的元素联系起来．在转化的基础上为问题的解决铺设桥梁，沟通到路．一些难度较大的问题借助平移、对称、旋转的合成及相互关系可能会更容易一些.

数学学习两基本：一个是忆，一个是悟性！

➢ **旋转构图变换要注意以下几点思考：**

① 全等变换：对应边相等，对应角相等；

② 对应点与旋转中心的连线构成等腰三角形；

③ 新关系：旋转会产生等腰或相似三角形；

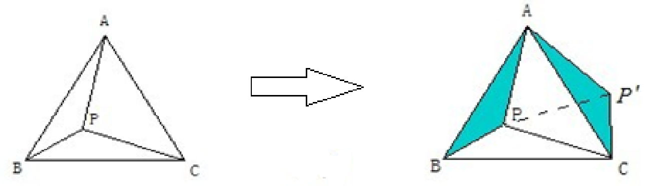
④ 应用：当题目中出现等线段共端点的时候考虑补全旋转结构，从而进行条件的转化

口诀：遇 60° 旋 60°，造等边三角形；遇 90° 旋 90°，造等腰直角；遇等腰旋顶点，造旋转全等

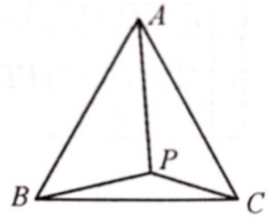
➢ 典型例题

类型一：遇 60° 旋转 60°，构造等边三角形

导图模型：



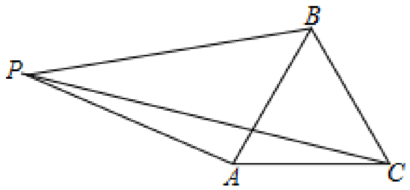
【例 1】已知点 P 是等边△ABC 内一点，且 PC=3，PB=4，PA=5，求∠BPC 的度数。



【变式 1】如图，点 P 是等边△ABC 外一点，PA=3，PB=4，PC=5

（1）将△APC 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到△P_1AC_1，画出旋转后的图形；

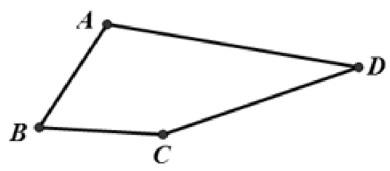
（2）在（1）的图形中，求∠APB 的度数．



【变式 2】如图，在四边形 ABCD 中，∠B = 60°，∠D = 30°，AB = BC.

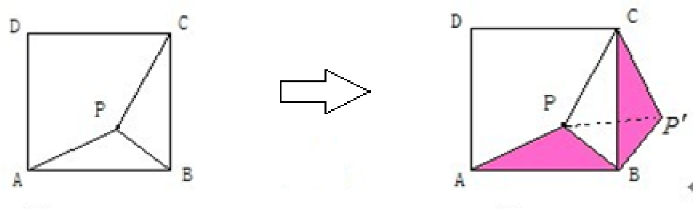
（1）∠A +∠C=__________°

（2）连接 BD，探究 AD，BD，CD 三者之间的数量关系，并说明理由.

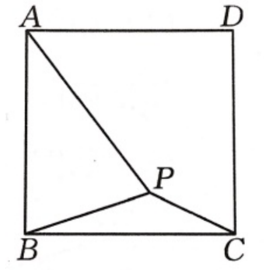


类型二：遇 90° 旋转 90°，构造等腰直角三角形

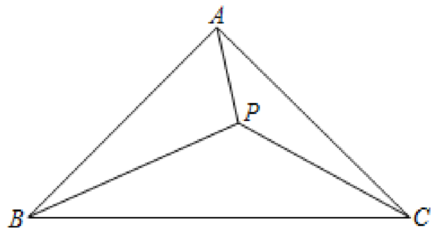
导图模型



【例 2】如图，在正方形 ABCD 内有一点 P，且 PA= $\sqrt{5}$ ，PB= $\sqrt{2}$ ，PC=1．求∠BPC 的度数和正方形 ABCD 的边长．



【变式 1】如图，在△ABC 中，∠BAC=90°，AB=AC，P 是△ABC 内一点，若 PA=1，PC=2，∠APC=135°，则 PB 的长为多少？



【变式 2】（1）问题发现：如图 1，在 Rt△ABC 中，AB=AC，D 为 BC 边上一点（不与点 B、C 重合）将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 90°得到 AE，连接 EC，则线段 BD 与 CE 的数量关系是：________，位置关系是：________；

（2）探究证明：如图 2，在 Rt△ABC 与 Rt△ADE 中，AB=AC，AD=AE，将△ADE 绕点 A 旋转，使点 D 落在 BC 的延长线上时，连接 EC，写出此时线段 AD，BD，CD 之间的等量关系，并证明；

（3）拓展延伸：如图 3，在四边形 ABCF 中，∠ABC=∠ACB=∠AFC=45°．若 BF=13，CF=5，请直接写出 AF 的长．

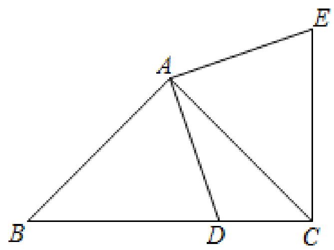


图1

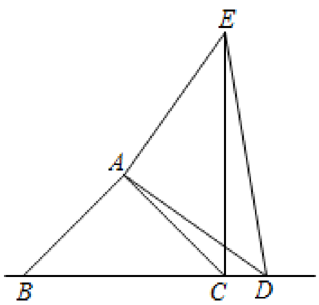


图2

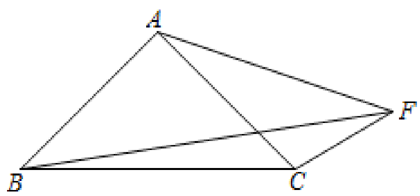
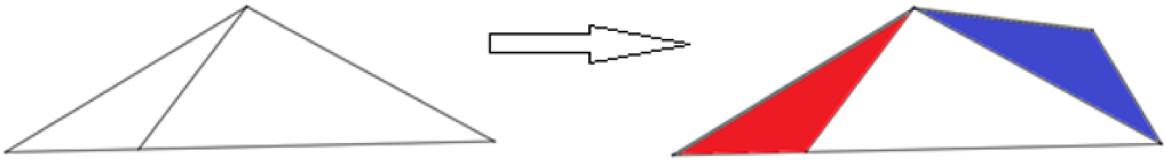


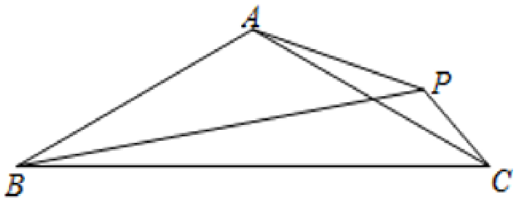
图3

类型三：遇 120°旋转 120°，构造等腰三角形

导图模型



【例 3】如图，在△ABC 中，AB=AC，∠BAC=120°，点 P 是三角形外右侧一点，且∠APB=∠ABC．请写出 PA，PB，PC 的数量关系．



【变式 1】如图 1，等边三角形 ABC 中，点 O 是△ABC 的∠B 和∠C 的角平分线的交点，∠FOG=120°，绕点 O 旋转∠FOG，分别交线段 AB、BC 于点 D、E 两点，连接 DE，若 OA=2，则△ODE 周长最小值为_______

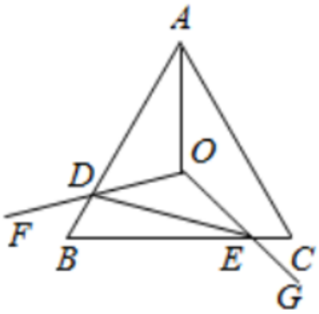


图 1

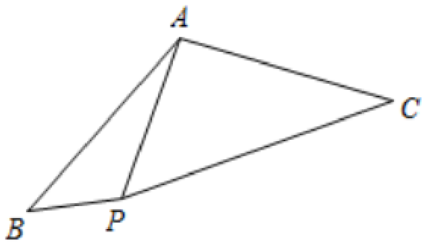


图 2

【变式 2】如图 2，线段 AB 绕着点 A 逆时针方向旋转 120°得到线段 AC，点 B 对应点 C，在∠BAC 的内部有一点 P，PA=8，PB=4，PC=4 $\sqrt{13}$，则线段 AB 的长为_____．

【变式 3】在△ABC 中，AB=AC，∠BAC=120°．

（1）如图 1，点 M、N 在底边 BC 上，且∠ANB=45°，∠MAN=60°．请在图中作出∠NAD=60°，且 AD=AM，连接 ND、CD；并直接写出 BM 与 CN 的数量关系：____．

（2）如图 2，点 M 在 BC 上，点 N 在 BC 的上方，且∠MBN=∠MAN=60°，求证：MC=BN+MN；

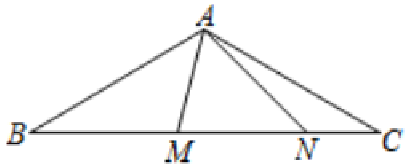


图1

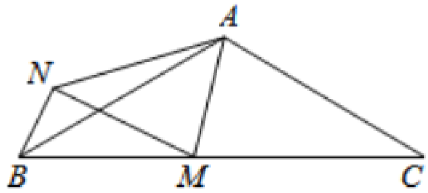
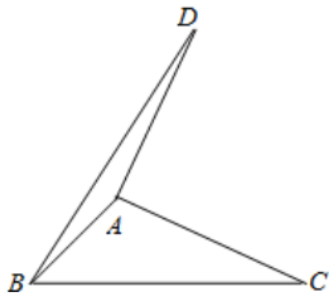


图2

➢ 对应练习

如图，△ABC 中，∠ABC=45°，AB= $\sqrt{2}$ ，BC=4，将线段 AC 绕点 A 逆时针旋转 90°，得到线段 AD，连接 BD，则线段 BD 的长为 ____.



2. 在四边形 *ABCD* 中，*AD*=4，*CD*＝3，*AB*=*AC*.

（1）如图 1，若∠*CAB*＝60°，∠*ADC*＝30°，求 *BD* 的长；

（2）如图 2，若∠*CAB*＝90°，∠*ADC*＝45°，求 *BD* 的长.

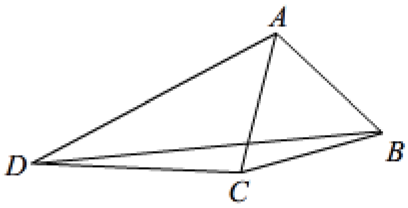


图 1

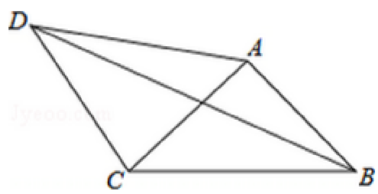


图 2

3.【问题发现】（1）如图 1，△ABC 与△CDE 中，

∠B=∠E=∠ACD=90°，AC=CD，B、C、E 三点在同一直线上，AB=3，ED=4，则 BE=__.

【问题提出】（2）如图 2，在 Rt△ABC 中，∠ABC=90°，BC=4，过点 C 作 CD⊥AC，且 CD=AC，求△BCD 的面积.

【问题解决】（3）如图 3，四边形 ABCD 中，

∠ABC=∠CAB=∠ADC=45°，△ACD 面积为 12 且 CD 的长为 6，求△BCD 的面积.

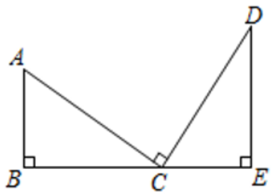


图1

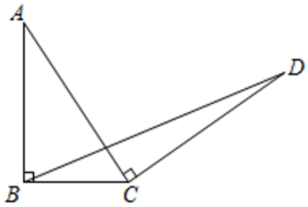


图2

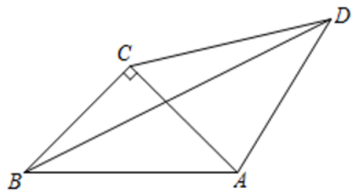


图3

4. 在四边形 ABCD 中，∠A+∠C=180°，DB 平分∠ADC.

（1）如图 1，求证：AB=BC；

（2）如图 2，连接 AC，若∠ADB=60°，求∠ACB 的度数；

（3）如图 3，在（2）的条件下，若 AD=7，CD=8，求 BD 的长.

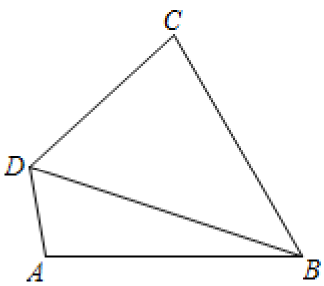


图1

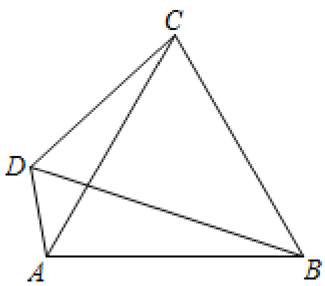


图2

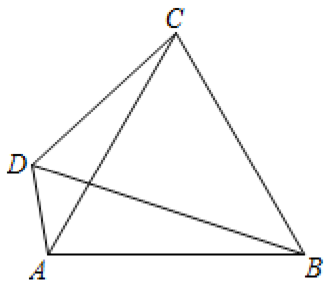


图3

5.已知点C为线段AB上一点，以AC为斜边作等腰直角三角形ADC，连接BD，在△ABD外侧，以BD为斜边作等腰直角三角形BED，连接EC．
（1）如图1，当∠DBA=30°时：
①求证：AC=BD；
②判断线段EC与EB的数量关系，并证明；
（2）如图2，当0°＜∠DBA＜45°时，探究EC与EB的数量关系并证明．

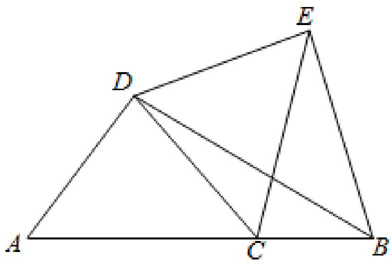


图 1

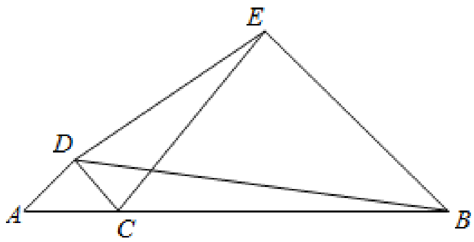


图 2

6.（1）如图1，点P是正方形ABCD内的一点，把△ABP绕点B顺时针方向旋转，使点A与点C重合，点P的对应点是Q．若PA=3，PC=5，PB=2 $\sqrt{2}$ ，求∠APB的度数；
（2）如图，在四边形ABCD中，AD=5，CD=3，∠ABC=∠ACB=∠ADC=45°，求BD的长．

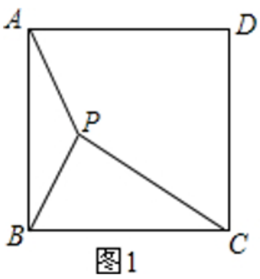


图1

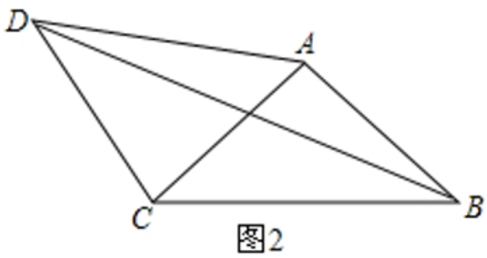
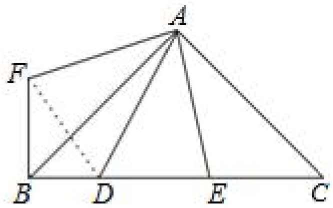


图2

➢ 角含半角练习

1.（1）如图1，△ABC中，∠BAC=90°，AB=AC，D、E在BC上，∠DAE=45°，为了探究BD、DE、CE之间的等量关系，现将△AEC绕A顺时针旋转90°后成△AFB，连接DF，经探究，你所得到的BD、DE、CE之间的等量关系式是 ________________.



（2）如图2，在△ABC中，∠BAC=120°，AB=AC，D、E在BC上，∠DAE=60°、∠ADE=45°，试仿照（1）的方法，利用图形的旋转变换，探究BD、DE、CE之间的等量关系，并证明你的结论.